

PEVNOST MNOHOSTĚŇŮ, MNOHOSTĚNNÁ PLOCHA, KOSTRA MNOHOSTĚŇU

Marie Kupčáková

ČLÁNEK VYCHÁZÍ ZE ZDROJŮ UVEDENÝCH V ZÁVĚRU

MNOHOSTĚŇ, MNOHOSTĚNNÁ PLOCHA, KOSTRA MNOHOSTĚŇU

Eukleides považoval mnohostěň za plné těleso, Platón za duté, tedy pouze za povrchový útvar. V geometrii, tedy ve školní geometrii, často nepovažujeme za nutné odlišit pojmy mnohostěň a mnohostěnná plocha, a tak dochází k nedorozuměním. (Definice těchto pojmů lze nalézt např. v Sekaninově publikaci *Mnohostěny* nebo v mé publikaci [TG4].) K dalšímu zmatení dochází, pokud abstrahujeme mnohostěň pouze na množinu složenou z vrcholů a stran mnohoúhelníků, tedy kostru mnohostěnu.

Budeme-li vytvářet modely mnohostěňů, mnohostěnných ploch a koster mnohostěňů, přesvědčíme se, že mají různé stereometrické vlastnosti.

Například v roce 1897 objevil francouzský inženýr **Raoul Bricard** kostry osmistěňů, které se pohybují (*obr. 1*).

Jeho osmistěny tvoří pouze hrany, některé v prostoru procházejí vnitřkem mnohostěnu.

Obr. 1 Kostry obou Bricardových pohyblivých osmistěňů



Trojúhelníkové stěny Bricardových osmistěňů, definované vrcholy a hranami, se protínají. Modely jsem si vytvořila z brček a provázek, a tak jsem se v souladu s Komenského doporučeními (*Didaktika veliká*) [TG7] na vlastní oči přesvědčila o jejich pohyblivosti. Ověřila jsem si, že i když zůstává stabilní délka hran, modely nejsou pevné a nezachovávají tvar.

KONVEXNÍ A NEKONVEXNÍ MNOHOSTĚŇ

Po dvě tisíciletí bylo slovo mnohostěň synonymem pro konvexní mnohostěň. Bylo to důsledkem Eukleidova zavedení mnohostěňů jako „*útvary tělesových omezených podobnými rovinami*“.

Eukleides v *Základech, Knize XIII.* totiž píše:

„Pravím ještě, že kromě řečených pěti útvarů neseстроиш útvaru jiného, jež by byl omezen stejnými úhelníky stejnostrannými a stejnoúhlými.“

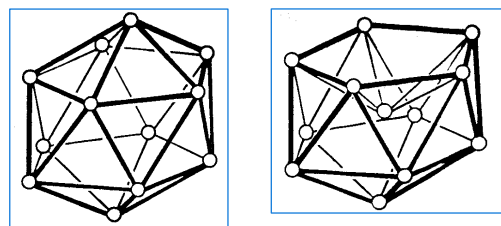
Těmi *pěti* útvary byly míněny tzv. Platónovy nebo také pravidelné mnohostěny, tedy **tetraedr, oktaedr, ikosaedr, hexaedr** a **dodekaedr** - v daném pořadí jsou na *obr. 2*. (Více viz [TG2].) Plné i duté modely jsou pevné.

Obr. 2 Modely dutých a plných pravidelných mnohostěňů [TG2]



Z dvaceti rovnostranných trojúhelníků lze vymodelovat i jiný útvar, než pravidelný dvacetistěň.

Na *obr. 3* jsou zobrazeny jednoduché a očekávané kostry dvou různých dvacetistěňů – forma konvexní a nekonvexní. Kostry po sestavení nejsou pohyblivé.



Obr. 3 Kostry konvexního a nekonvexního dvacetistěně

IZOMETRICKÉ MNOHOSTĚNY

Pro **izometrické mnohostěny** platí: Mezi body jejich povrchů je možné najít takový vzájemný vztah, že každé spojnici na povrchu jednoho odpovídá na povrchu druhého spojnice téže délky.

Izometrii zachovávají také papírové mnohostěnné plochy na *obr. 4*, kde se proměnila konvexní podoba Johnsonova mnohostěnu J_{32} - *pentagonal orthocupolarotunda* – v nekonvexní útvar, v misku.

Vystřihovánku *Miska s vůní květin* jsem sestrojila pro časopis *abc* v roce 2000. Obě formy mnohostěnu jsou pevné. Oba mnohostěny měly tutéž síť.

Otázka existence a jednoznačnosti mnohostěnu, který má danou síť, je spojena se širokým okruhem matematických otázek, které jsou obsahem tzv. **vnitřní geometrie povrchů**. Problém lze přiblížit pomocí fiktivních bytostí, které se pohybují v ploše povrchu a nemají možnost zkoumat oblast uvnitř prostorového útvaru (odchylky stěn, objem, odchylky dvou čar v prostoru apod.).

Dva různé, nikoliv shodné prostorové útvary mohou mít tutéž vnitřní geometrii povrchů. (Viz zmíněná dvojice konvexního a nekonvexního dvacetistěnu.)

Je proto zřejmé, že mnohostěn svou sítí není určen.

Obr. 4 Proměna Johnsonova mnohostěnu J_{32}



IZOMORFNÍ MNOHOSTĚNY

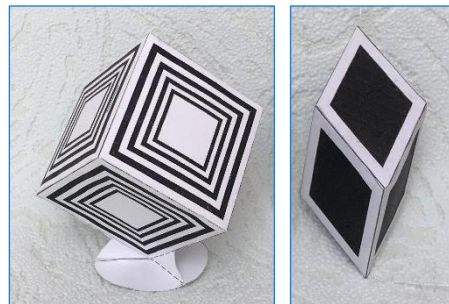
Obecně: **Izomorfismus** je vzájemně jednoznačné (bijektivní) zobrazení mezi dvěma matematickými strukturami, které zachovává všechny vlastnosti jednou strukturou definované.

Tedy každému prvku první struktury odpovídá právě jeden prvek struktury druhé a toto přiřazení zachovává všechny definované vztahy k ostatním prvkům.

Pokud existuje izomorfní zobrazení mezi dvěma mnohostěny, budou se označovat jako **mnohostěny izomorfní** (viz *obr. 5*). Takovou dvojicí je například krychle [TG1] a rovnoběžnostěn [TG6].

Sestavené modely jsou pevné, při jemném stisku se jejich povrch nedeformuje.

Obr. 5 Izomorfní mnohostěny – krychle a rovnoběžnostěn



Je zřejmé, že izometrické mnohostěny jsou též navzájem izomorfní.

Odpovídající si stěny jsou navíc navzájem shodné, a lze je tedy rozvinout do shodných sítí.

METAMORFY

V Tvořivé geometrii 3 – Modely proměnlivých útvarů

jsem publikovala zvláštní skupinu uzavřených mnohostěnných ploch, které lze v prostoru proměňovat. Jejich základní prvky však svůj tvar nemění, zůstávají pevné.

Nejznámější jsou prstence proslavené jako *kaleidocykly* pokryté escherovskými dekory, které na ně přenesli Schattschneiderová a Walker. V publikaci [TG3] nabízím mé vlastní pokrývání i návody, jak kaleidocykly vytvářet. Prstence patří do skupiny geometrických objektů, které **Robert Byrnes** v roce 2004 označil jako metamorfy.

Metamorf je podle Byrnesa papírový 2D nebo 3D model, který se manipulací transformuje do různých podob, až se navrátí k první podobě. Tuto proměnu Byrnes označuje jako plnocyklickou.



Obr. 6 Metamorfy – kaleidocykly [TG3]

Upřesňuje, že se nemůže stát, aby se pohyb v jistém okamžiku zastavil a my se museli vracet. To by podle něho nebyl metamorf.

CAUCHYHO TEORIE RIGIDITY (RIGIDITY CONJECTURE)

Konvexní a z nich nekonvexní formy dvacetistěnu (obr. 3) nebo J_{32} (obr. 4) nemůžeme získat jinak, než že modely rozřízneme, upravíme a znova složíme. Jak bylo uvedeno, jejich modely jsou pevné.

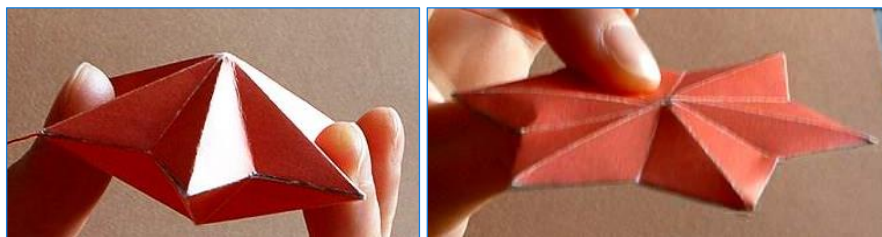
Hypotéza, že jsou pevné všechny mnohostěny, se stala známá jako **Cauchyho hypotéza pevnosti**, rigidity.

Nekonvexní mnohostěny však tuto vlastnost obecně nemají. Příkladem nepevného povrchu je papírový model nekonvexního dvaceti čtyřstěnu s trojúhelníkovými stěnami (obr. 8a). Při jeho „zmáčknutí“ se jedná o jiný pohyb a výslednou změnu, o jinou pohyblivost, než u metamorfů. Tentokrát jakkoliv málo změním jemným stiskem tvar mnohostěnné plochy (mnohostěnu), dostávám jiný mnohostěn. Ten už není s prvním shodný, oba zůstávají navzájem pouze izometrické.

Sít hvězdičky, jejímž půdorysem a jednou z poloh „do obálky“ je hvězdíkový šestiúhelník (obr. 8b) jsem publikovala v 25. čísle časopisu *abc* v roce 2004 spolu s flexibilní dvojhvězdou mající funkci ozdobné špice vánočního stromku pod názvem „Betlémská hvězda“ (obr. 7).



Obr. 7 Pohyblivé povrchy vánočních dekorací



Obr. 8a, 8b Krajní polohy Betlémské hvězdy

Každá prostorová poloha hvězdy (obr. 8a) je s jinou její polohou ve vztahu flexibility (pohyblivosti), dva takto si odpovídající mnohostěny jsou izometrické. Tyto izomery lze nazývat FLEXIMERY nebo též **FLEXORY**.

Hypotéza o pevnosti všech uzavřených mnohostěňů byla s objevením flexorů vyvrácena, opravena a formulována jako tzv.

CAUCHYHO VĚTA (1813). Zde jsou dvě z jejích různých formulací:

- Jsou-li všechny stěny jednoho ze dvou izomorfních konvexních mnohostěňů shodné s odpovídajícími stěnami druhého, pak jsou tyto mnohostěny pevné.
- **Uzavřený konvexní mnohostěn je pevný.**

Zároveň bylo vyvráceno starší než Cauchyho, a to **Eulerovo** tvrzení (1766), že *uzavřený prostorový útvar nedovoluje změny bez toho, že by byl rozřiznut („ripped“)*.

Obecně platí pouze to, že konvexní mnohostěny (mnohostěnné plochy) s pevnými stěnami jsou pevné, tj. nemohou být bez poškození stěn proměňovány v jiný tvar.

Dvojice izometrických nikoliv shodných mnohostěňů (mnohostěnných ploch) mohou být

- konvexní - nekonvexní nebo
- oba nekonvexní.

Lze je také dělit podle toho, jak mohou být v sebe navzájem proměněny:

1. Rozložením a novým složením povrchu, tedy rozřiznutím, změnou, slepením (obr. 4).

2. Bez rozložení, pouze spojitou deformací, která zachovává metrické vlastnosti stěn (obr. 8) = **FLEXORY**.

Cromwell v publikaci *Polyhedra* zavádí pojem **typově ekvivalentních mnohostěňů**:

Dva mnohostěny P_1 , P_2 jsou typově ekvivalentní právě tehdy, když P_1 je shodný s P_2 , nebo existuje spojitá deformace mnohostěnu P_1 , která zachovává metrické vlastnosti stěn a jejímž výsledkem je mnohostěn P_2 shodný s P_1 .

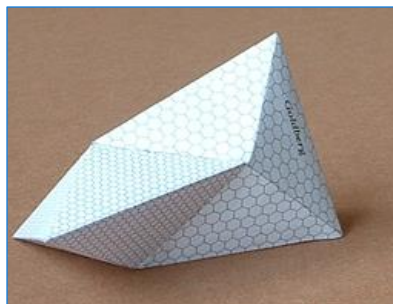
Každé dvě různé prostorové konfigurace flexoru jsou dvojicí typově ekvivalentních mnohostěňů.

FLEXORY S TROJÚHELNÍKOVÝMI STĚNAMI

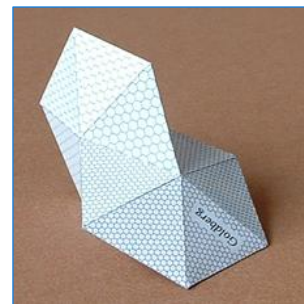
V roce 2004 jsem v různých zdrojích vyhledávala flexory s trojúhelníkovými stěnami, vytvářela jejich papírové modely, přesvědčila se o jejich flexibilitě a sestavila pro svoji dizertační práci kolekci všeho, co bylo k nalezení.



Obr. 9 Wunderlichův skákající osmistěn



Obr. 10 Goldbergerovy flexory



Jedním z prvních papírových modelů flexoru byl zřejmě **Wunderlichův** tzv. „skákající“ osmistěn (obr. 9): Zmáčkne-li horní podstavu sestaveného položeného mnohostěnu směrem dolů, sám se vypruží zpět.

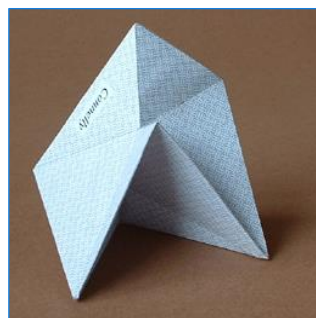
Goldberg přišel na dva flexibilní mnohostěny (obr. 10). Prvý z nich se stisknutím uprostřed pohybuje téměř neznatelně. Druhý je nekonvexní delta-dvacetistěn, jehož pohyb při stisku uprostřed je již znatelnější a navíc souměrný.

S dalším pohyblivým povrchem přišel **Mason** (obr. 11): Nad pět stěn krychle připojil pravidelné čtyřboké jehlany, jejichž stěny jsou rovnostranné trojúhelníky, nad šestou stěnu krychle umístil čtyřboké antiprizma, které má nad čtvercovou podstavou opět pravidelný čtyřboký jehlan. Při stisknutí se mnohostěn „promáčkne“, aniž by se stěny deformovaly.

Na internetu jsem tehdy našla „**Connolly** flexible polyhedron“ (obr. 12).



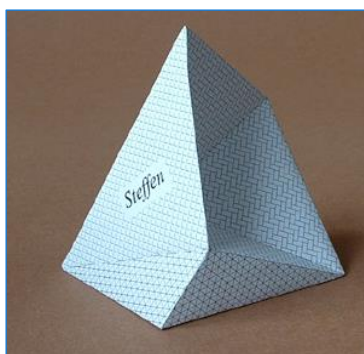
Obr. 11 Masonův flexor



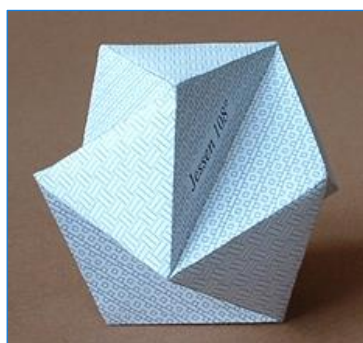
Obr. 12 Connollyho flexor

Steffen objevil příklad flexoru se 14 stěnami a 9 vrcholy (obr. 13).

„**Jessen's orthogonal icosahedron**“ při stisku protilehlých vrcholů jakoby „dýchá“ (obr. 14).



Obr. 13 Steffenův flexor



Obr. 14 Jessenův flexor

DELTA FLEXORY

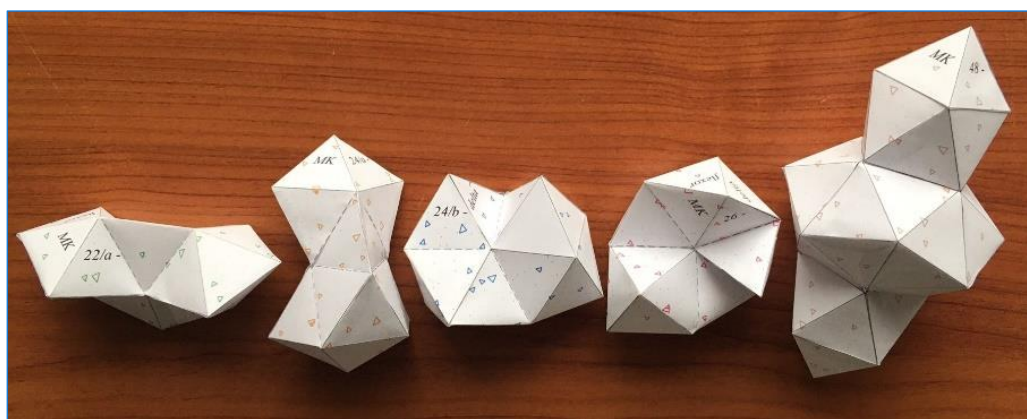
Dva z výše uvedených flexibilních mnohostěnů mají povrch vytvořený pouze z rovnostranných trojúhelníků. Mnohostěny s touto vlastností se nazývají deltastěny (řecké Δ , δ - delta).

Proto jsem obdobně pojmenovala takové flexory jako **delta flexory** a hledala další.

Matematik **Hans Freudenthal** (1905 – 1990) v roce 1947 dokázal, že konvexních deltastěnů je právě osm a nekonvexních nekonečně mnoho. Vzhledem k tomu, že delta flexory budou nekonvexní, lze usoudit, že i jich může být nekonečně mnoho.

V roce 2011 se mi v krátké době podařilo objevit pětici delta flexorů (obr. 15), které jsem charakterizovala podle počtu stěn a podle počtu vrcholů s jistou valencí (uvedeno za lomítkem):

1. **22-delta flexor**; 13 vrcholů - 7/4, 4/6, 2/7
2. **24-delta flexor**; 14 vrcholů - 3/4, 6/5, 3/6, 2/7
3. **24-delta flexor**; 15 vrcholů - 6/4, 3/5, 4/6, 2/7
4. **26-delta flexor**; 15 vrcholů - 2/3, 5/4, 2/5, 2/6, 2/7, 2/8
5. **48-delta flexor**; 25 vrcholů - 2/4, 16/5, 8/7



Obr. 15 Pětice delta flexorů, ©Marie Kupčáková 2011

Pohyblivost těchto pěti delta flexorů jsem předvedla účastníkům 31. konference o geometrii a grafice a svůj objev uveřejnila ve sborníku této konference.

Závěrečná poznámka

Sítě pětice flexorů jsem dosud (2024) nepublikovala. Pokud však zaznamenám zájem veřejnosti, mohu tak učinit prostřednictvím mých webových stránek.

ZDROJE

KUPČÁKOVÁ, M. *Geometrie jako tvorba*. Disertační práce. MFF UK Praha. 2005.

KUPČÁKOVÁ, M. *Flexory s trojúhelníkovými stěnami*. In sborník 31. konference o geometrii a grafice. s. 165-170. ISBN 978-80-248-2524-3. (2011

[TG1] KUPČÁKOVÁ, M. *Tvořivá geometrie 1 - Modely základních prostorových útvarů*. Vydavatelství Marie Kupčáková. Hradec Králové 2019

[TG2] KUPČÁKOVÁ, M. *Tvořivá geometrie 2 - Modely proměnlivých útvarů*. Vydavatelství Marie Kupčáková. Hradec Králové 2018

[TG3] KUPČÁKOVÁ, M. *Tvořivá geometrie 3 - Modely úloh z Eukleidových Základů*. Vydavatelství Marie Kupčáková. Hradec Králové 2018

- [TG4] KUPČÁKOVÁ, M. *Tvořivá geometrie 4 - Modely poloprávdelných mnohostěů*. Vydavatelství Marie Kupčáková. Hradec Králové 2020
- [TG6] KUPČÁKOVÁ, M. *Tvořivá geometrie 6 - Náčrtky v rovnoběžném promítání a konstrukce papírových modelů*. Vydavatelství Marie Kupčáková. Hradec Králové 2020
- [TG7] KUPČÁKOVÁ, M. *Tvořivá geometrie 7 – O elipse, oválu, vejcovce a tvarech z nich odvozených*. Vydavatelství Marie Kupčáková. Hradec Králové 2022
- KUPČÁKOVÁ, M. *Betlémská hvězda*. ABC - časopis generace XXI. století, č. 25, roč. 49 (2004), str. 48, 55
- KUPČÁKOVÁ, M. *Miska s vůní*. ABC - časopis generace XXI. století, č. 24, roč. 45 (2000), str. 30

BYRNES, R. *Metamorphs*. Tarquin, Norfolk, 2004

EUKLEIDES. *Základy* (Elementa). Překlad František Servít. Praha, 1907

CROMWELL, P. R. *Polyhedra*. Cambridge University Pres, 1997

SCHATTSCHEIDEROVÁ, D., WALKER, W. M. C. *Escher kaleidocykly*. Taschen, Berlin, 1992

SEKANINA, M., SEKANINOVÁ, A. *Mnohostěny*. Brno, 1977