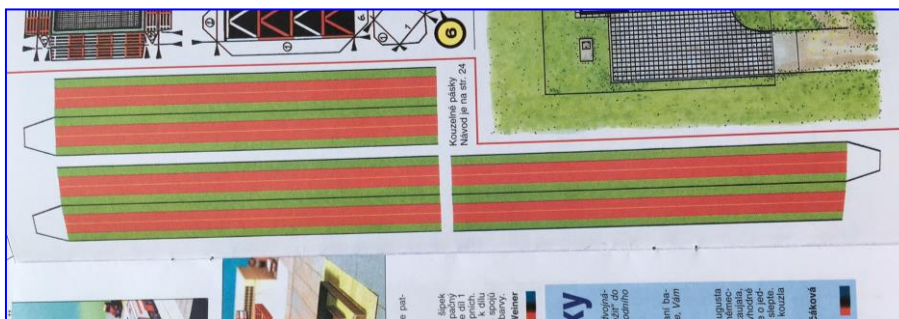


KOUZELNÉ PÁSKY NA VÁNOČNÍ UBROUSKY



Barevný proužek z dnešního svátečního čísla má svůj speciální název, říká se mu **Möbiův pásek** a skrývá mnoho netušených kouzel. Tři Möbiovy pásy si můžete sestavit, použít je při úpravě štědrovečerní tabule (lze jimi provléknout papírové ubrousky) a kouzla si ponechat až na druhý den, na Boží hod vánoční.



Ukázka stránky abc

NÁVOD NA SESTAVENÍ

Proužky po obvodu vystříhnete. Černou čáru uprostřed narýhujete podle pravítka a pásy přehněte. Celý rub potřete bílou lepicí pastou, nechte papír chvíli změkhnout a slepte k sobě (ne až do konce). Každý proužek překruťte o 180° (o jednu půlotáčku), zasuňte záložku do druhého konce a přilepte. Čáry a barvy na sebe navazují. Pečlivě si s každým modelem pohrajte, aby pásy byly na všech místech vypnuté a aby byly překroucené vždy proti slepenému spoji.

KOUZLO ČÍSLO 1

Vyznačte si fixou na „jedné“ straně proužku kolečko a z „druhé“ strany křížek. Lze nakreslit nepřerušovanou čáru od kolečka ke křížku, aniž byste přešli přes okraj proužku? (*Ano, je to jednostranná plocha.*) Procházky mravence po takové ploše dokonale zobrazil **M.C.Escher** a vy je můžete sledovat na stránce <http://www.worldofescher.com/gallery/MobiusStripII.html> (2001).

KOUZLO ČÍSLO 2

Druhý proužek rozřízněte (popřípadě rozstříhněte) ve žluté ose. Co myslíte, že se stane? (*Nerozpadne se, je dvojnásobně dlouhý a lze jej pěkně „vložit“ do sebe tak, že má opět podobu původního Möbiova proužku.*)

KOUZLO ČÍSLO 3

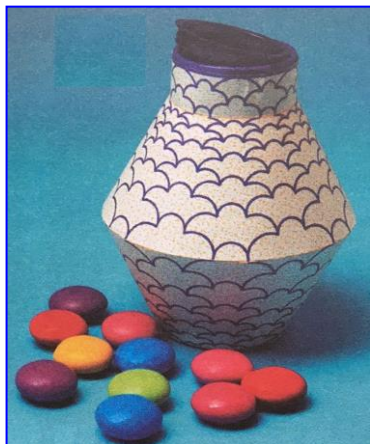
Třetí proužek stříhejte na rozhraní barev červené a zelené. (*Co se stane, Vám neprozradíme.*)

A CO DÁL?

Pokud Vás hra s vynálezem **Augusta Ferdinanda Möbia** (1790-1868), německého matematika a astronoma, zaujala, nastříhejte si papírové proužky vhodné šířky a délky, přetočte je o jednu, dvě, tři půlotáčky a slepte. Můžete dále zkoušet kouzla s jejich rozstřiháváním.

Konstrukce a slepení modelu Marie Kupčáková

DŽINOVA LÁHEV



Džinova láhev

Dokončení ze str. 24

DŽINOVA LÁHEV

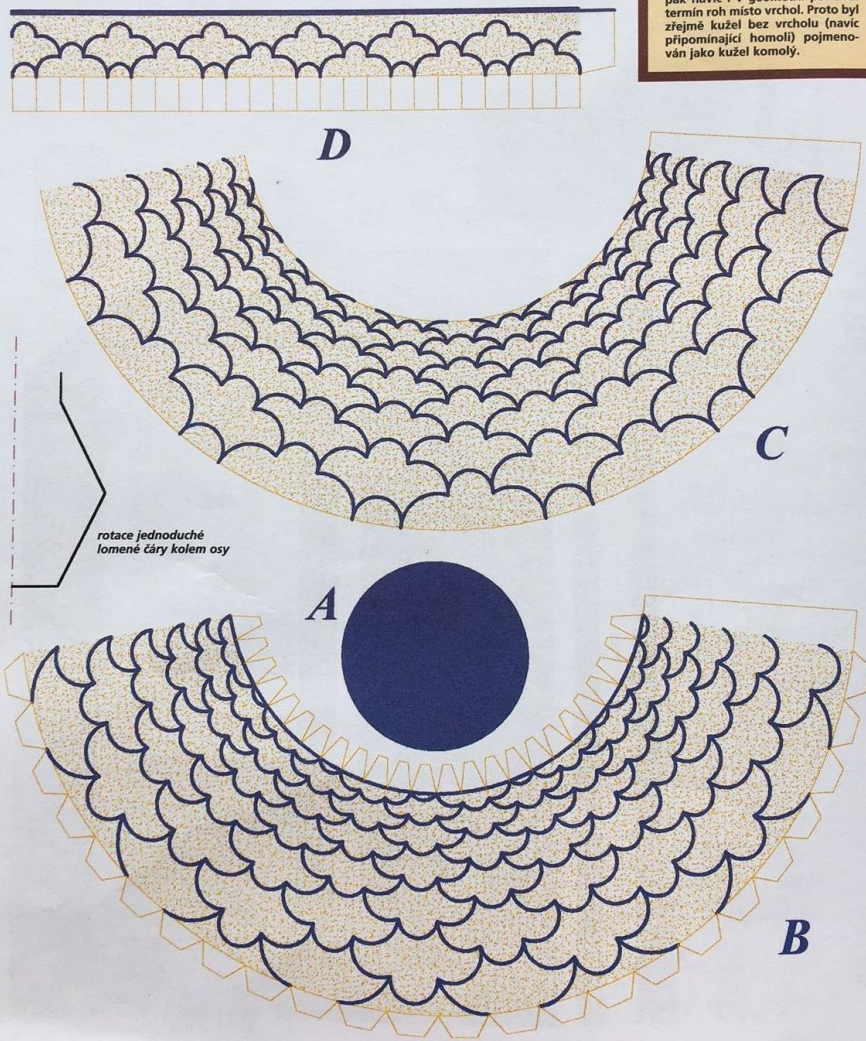
Už teď má sestavený model tvar lahvičky nebo vázičky. Láhev s džinem však musí být zavážovaná, aby duch nemohl nekontrolovaně řádit. Použijte válcovou krabičku od lentilek, jejíž výška je 10 cm a průměr asi 4 cm (60 g). Zkusmo ji vsuňte do složeného modelu. Po-

kud je mezi hrdlem a krabičkou vůle, lentilky vyjměte, přilepte dokola na krabičku proužek papíru (např. odstřížek z vystřihovanky). Do sestaveného modelu nasypete asi dvě lžičky rýže, podržte láhev ve vodorovné poloze, zasuňte do ní krabičku lentilek a v krajích slepte. Láhev postavte a zatřeptejte s ní. Rýže uvnitř pěkně vypne a zpevní spodní část modelu.

Marie Kupčáková
Slepení modelu autorka

VYTVOŘENÍ PLOCHY

Rotací jednoduché lomené čáry (viz obrázek) kolem osy, která leží ve stejné rovině jako čára, vznikne rotační plocha. Bude mít čtyři části: plášť válce, dva pláště rotačních komolých kuželů a kruh. Zajímá vás, proč se říká „komolý kužel“? Kdysi dávno se používal výraz komolý pro bezrohlý. Dokonce na Valašsku se bezrohlé krávé se říkalo gomola. Dříve se pak navíc i v geometrii používal termín roh místo vrchol. Proto byl zřejmý kužel bez vrcholu (navíc připomínající homoli) pojmenován jako kužel komolý.



Ukázka stránky abc

Slyšeli jste o tom, jak je nebezpečné vypustit džina z láhve? Tato orientální pohádková bytost dokáže na svobodě natropit pěknou paseku! A víte, jak vypadá láhev, v níž džin přebývá? Možná má tvar modelu z naší vystřihovanky. Připravili jsme ji dokonce jako obal na megalentilky, takže bude skrývat i sladké pokušení.

SESTAVENÍ MODELU

Model má čtyři díly: kruhovou podstavu A, dva pláště B a C rotačních komolých kuželů ve tvaru výsečí mezikruží (spodní je se záložkami) a obdélníkový plášť D válce se záložkami. Všechny části po obvodu vystřihněte. „Zubaté“ záložky jemně ohněte. U válce D narýhněte žlutou linku, přehněte v ní model na líc a všechny obdélníkové záložky až k lince nastřihněte. Slepte plášť B dolního kužele, potom plášť C horního kužele, potřete najednou všechny záložky společné kruhové hrany a obě části slepte. Pokud možno

nemačkejte, oblé plochy se budou samy vypínat. Slepte plášť válce D. Potřete lepidlem všechny záložky, vsuňte hrdlo do láhve a zespod přilepte. K dolní kruhové hraně přilepte modrou podstavu A. (Můžete vsunout dovnitř krabičku megalentilek a dokončit přitisknutím.)

DŽINOVA LÁHEV

Už teď má sestavený model tvar lahvičky nebo vázičky. Láhev s džinem však musí být zavíčkovaná, aby duch nemohl nekontrolovaně řádit. Použijte válcovou krabičku od lentilek, jejíž výška je 10 cm a průměr asi 4 cm (60 g). Zkusmo ji vsuňte do složeného modelu. Pokud je mezi hrdlem a krabičkou vůle, lentilky vyjměte, přilepte dokola na krabičku proužek papíru (např. odstrižek z vystřihovánky). Do sestaveného modelu nasypete asi dvě lžičky rýže, podržte láhev ve vodorovné poloze, zasuňte do ní krabičku lentilek a v kraji slepte. Láhev postavte a zatřepejte s ní. Rýže uvnitř pěkně vypne a zpevní spodní část modelu.

Konstrukce a slepení modelu Marie Kupčáková

3. ČLÁNEK KUPČÁKOVÁ. M. *Kleinova láhev. ABC*, roč. 49, s. 21 a 24

KLEINOVA LÁHEV JAKO DÁVKOVAČ ANTIPERLÍ

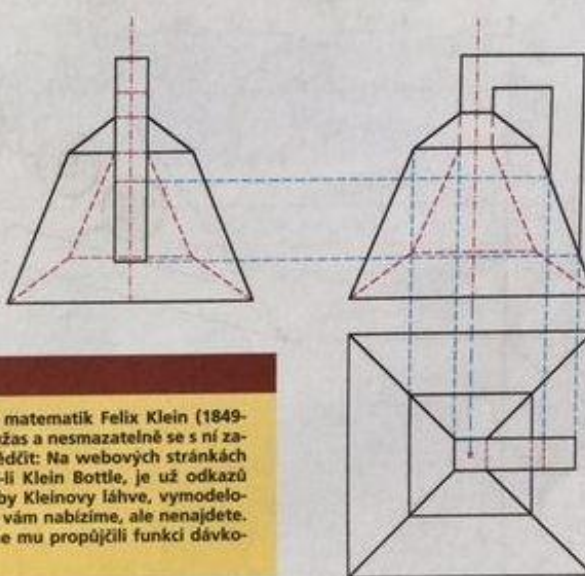


TOPOLOGIE NA INTERNETU

Naše dnešní láhev se opravdu jmenuje Kleinova, ale význačný matematik Felix Klein (1849 – 1925) v ní nepřebýval. On ji vymyslel, vyvolal mezi matematiky úžas a nesmazatelně se s ní zapsal do oboru zvaného topologie. Můžete se o tom sami přesvědčit: Na webových stránkách pod heslem **Kleinova láhev** najdete asi 21 odkazů, ale zadáte-li **Klein Bottle**, je už odkazů 103 000 (v roce 2004). Na internetových adresách naleznete rozmanité podoby Kleinovy láhve, vymodelované ze skla, gumy, úpletu či na počítači. Papírový model, který vám nabízíme, ale nenajdete.

Byl připraven speciálně pro šikovné modeláře ábíčka. Navíc jsme mu propůjčili funkci dávkovače bonbonků zvaných antiperle.

Složte komínek C (při lepení jej můžete stisknout na plocho). Sestavený komínek prostrčte vystřiženým obdélníkovým otvorem v dílu A, potřete jeho záložky a podle označení slepte 2 – 5. Složte díly F a G (barva je uvnitř) a sestavte je k sobě. Vytvoří se jakoby „vnitřní plocha“ kalichu. Sestavte komínky E a H (pozor – záložka u H je přilepena vně – barva je uvnitř). Postavte F na podložku a na záložky dílu G z rubu navlékněte a přilepte podle označení 9 – 12 komínek E. Do jeho vnitřku zespod zasuňte (směrem od F do G) a přilepte podle označení díl H, který pěkně zakryje



TOPOLOGIE NA INTERNETU

Naše dnešní láhev se opravdu jmenuje Kleinova, ale význačný matematik Felix Klein (1849–1925) v ní nepřebýval. On ji vymyslel, vyvolal mezi matematiky úžas a nesmazatelně se s ní zapsal do oboru zvaného topologie. Můžete se o tom sami přesvědčit: Na webových stránkách pod heslem Kleinova láhev najdete asi 21 odkazů, ale zadáte-li Klein Bottle, je už odkazů 103 000. Na internetových adresách naleznete rozmanité podoby Kleinovy láhve, vymodelované ze skla, gumy, úpletu či na počítači. Papírový model, který vám nabízíme, ale nenajdete. Byl připraven speciálně pro šikovné modeláře ábíčka. Navíc jsme mu propůjčili funkci dávkovače bonbonků zvaných antiperle.

KOUZLO KLEINOVY LÁHVE

Čtenářům **ABC** jsme již představili MÖBIŮV PÁS (roč. 46, č. 26). Vznikne tak, že se proužek papíru překrutí a slepí. Dostaneme jednostrannou plochu, tedy takovou, která nemá „rub“ a „líc“. Bytosti, které by na ní žily, by nikdy nemusely přelézat přes volný kraj, a přesto by mohly navštěvovat kamarády žijící zdánlivě na druhé straně.

Kleinova láhev je prostorovou obdobou tohoto pásu. Je to uzavřená, spojitá, avšak samu sebe protínající plocha. Nemá žádnou volnou hranu (jako například sklenka či naše „Džinova láhev“) a je jednostranná, tedy nedělí prostor na dvě části zvané vnitřek a vnějšek (jako třeba míč). Ve čtyřrozměrném prostoru by dokonce sama sebe neprotínala!

Je náročné si takový útvar představit. I když si prohlédnete internetové odkazy, bude se vám zdát pohyb po takové ploše záhadný. Sestavte si proto naši vystřihovánku. Určitě vzbudí zájem vašich starších sourozenců, táty i dědy.

NÁVOD NA SESTAVENÍ

Pro lepší představu o složeném modelu si na obrázku prohlédněte jeho půdorys, nárys a bokorys (tedy pohledy shora, zepředu a zprava).

Spoje řádně přilepujte, protože uvnitř složené vystřihovánky se budou pohybovat perličky a odchlípnuté záložky by jim znemožnily cestu.

Všechny díly po obvodu vystříhněte. Z rubu si při tom průběžně poznamenávejte označení dílů A - H a čísla hran 1 - 18.

Narýhujte všechny barevně vyznačené hrany (i u záložek) a přeložte je – v modrých čarách rub na rub, v červených čarách líc na líc.

Složte komínek C (při lepení jej můžete stisknout na plocho). Sestavený komínek prostrčte vystřiženým obdélníkovým otvorem v dílu A, potřete jeho záložky a podle označení slepte 2 - 5.

Složte díly F a G (barva je uvnitř) a sestavte je k sobě. Vytvoří se jakoby „vnitřní plocha“ kalichu.

Sestavte komínky E a H (pozor – záložka u H je přilepena vně – barva je uvnitř). Postavte F na podložku a na záložky dílu G z rubu navlékněte a přilepte podle označení 9 - 12 komínek E. Do jeho vnitřku zespod zasuněte (směrem od F do G) a přilepte podle označení díl H, který pěkně zakryje rub vystřihovánky (H potřete lepidlem jen malinko, aby lehce vklouzl do komínku E).

Sestavte díl B. Spojte jej hranami 15 a 16 s dílem A. Navlékněte B na komínek E podle označení 14. Bude přiléhat k barevnému rozhraní komínku – přilepte jej, zevnitř jsou záložky přístupné.

Přilepte tu hranu „vnější stěny“ kalichu A, na kterou je připojen dlouhý komínek C, ke „spodní“ hraně dílu F kalichu.

Díl D tvoří most mezi C a E. Nesložený jej podsuňte pod lepidlem potřené záložky 17 a 18 a přilepte. Sestavte a slepte celý most (není označeno čísly), tiskněte přitom komínky v prstech k sobě, přilepujte nejprve obě lichoběžníkové plochy, potom „víčko“.

Dokončete slepení obou částí povrchu kalichu, střídavě jej slepujte „dole“ a „nahore“, nakonec obvod kalichu.

PUTOVÁNÍ PO PLOŠE

Představte si, že kalich byl sestaven z jednobarevného zeleného papíru. Cestovatelem po ploše bude první perlička. Libovolný bílý puntík na kraji kalichu bude značkou pro start a cíl její cesty. Promyslete si, jak musíte kalich naklánět, aby se kulička dostala od startu do cíle. Ten je sice na stejné pozici, ale v neviditelné části modelu. Perlička brzy zmizí z očí, víte však, že je stále na zelené straně. To, jak postupuje k cíli, poznáte podle chvění povrchu a stisknutím okraje s puntíky. S trochou šikovnosti by se odtud zase dostala na startovní značku.

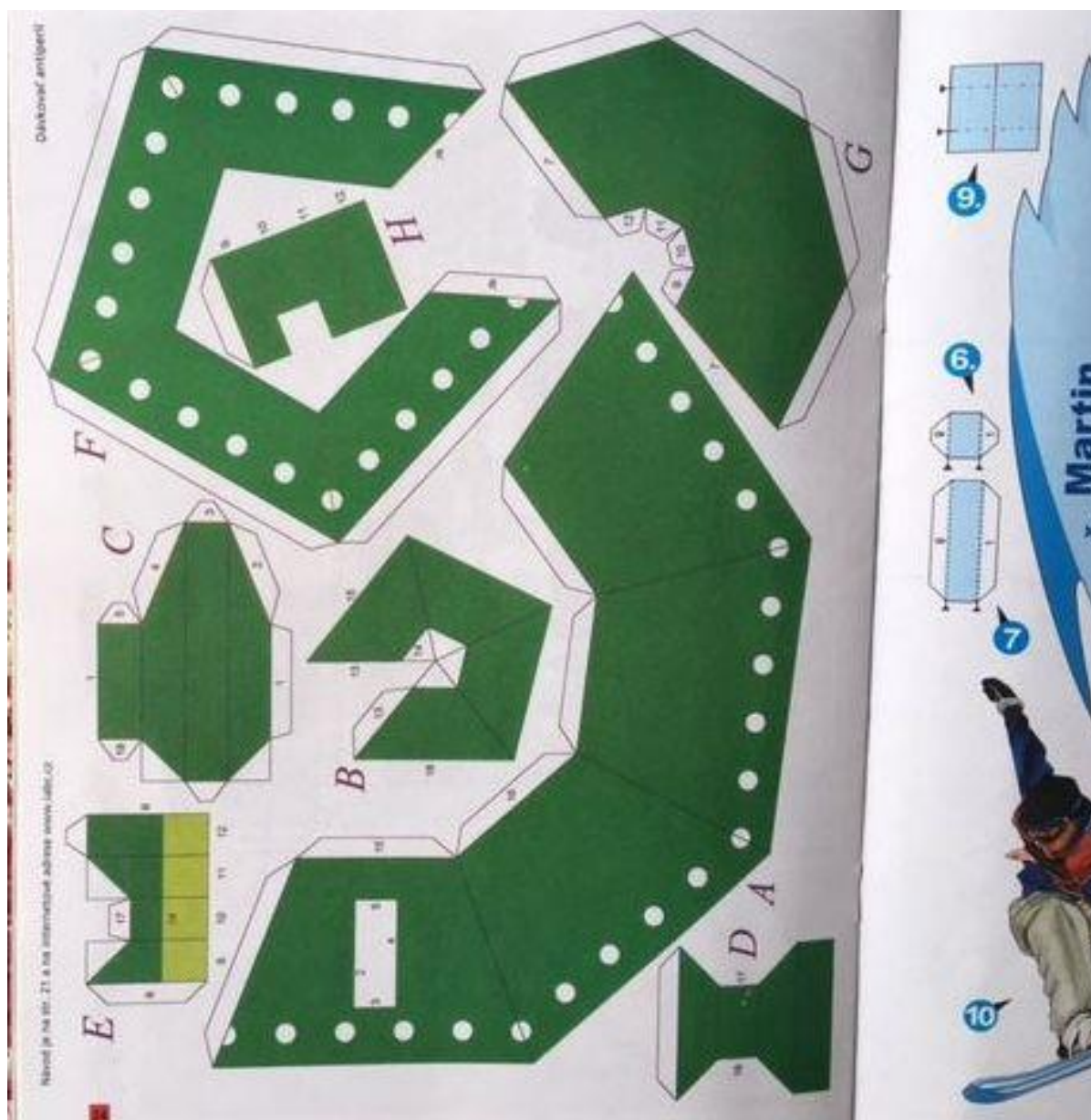
Kdyby byl kalich obdařen přitažlivostí a perličky životem, pak bychom je mohli odstartovat odkudkoliv a ony by se proháněly po celé ploše, aniž by vnímaly nějaký rub a líc, vnitřek a vnějšek. Každý bod plochy by byl pro ně dostupný.

DÁVKOVAČ ANTIPERLÍ

Nasypte do kalichu pár kuliček, odešlete je překlápěním do neviditelných zákoutí Kleinovy láhve. Zatřepejte kalichem tak, aby jej bylo možné postavit na nožičku. Vyzvěte bratra nebo mamku, ať si jednu kuličku vysypou.

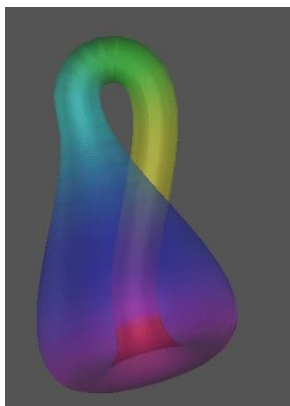
Náš dávkovač vám přiblíží problém, který i dnes zajímá tisíce lidí na celém světě.

Konstrukce a slepení modelu Marie Kupčáková.



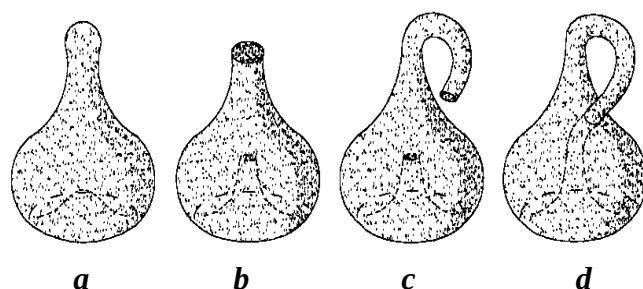
Ukázka stránky abc

3.3.2 Kleinova láhev



Kleinova láhev a její modelování jsou více jak sto let po objevu stále inspirujícím geometrickým námětem. Většina modelů Kleinovy láhve na obrázcích v učebnicích geometrie i na webovských stránkách je počítačových (obr. 3.204 **David P. Cervone**) nebo původně vyrobených ze skla. Pro výklad je vhodnější skutečný papírový model, na kterém lze ověřovat topologické vlastnosti této jednostranné plochy.

Obr. 3.204 Kleinova láhev, Davide P. Cervone



Obr. 3.205 Proměny plochy

Z euklidovské geometrie máme jasnou představu o tom, že každá uzavřená omezená plocha dělí prostor E_3 na tři části, které můžeme nazvat *vnitřek*, *vnějšek* a *hranice*.

Příkladem takové plochy je baňka, láhev **a** na obr. 3.205. Deformacemi **b**, **c** pak teoreticky dojdeme ke zcela jiné láhvi **d**, která je také uzavřenou plochou, prostor však nedělí na vnitřek a vnějšek. Je to jednostranná plocha, která dostala jméno podle svého objevitele **Felixe Kleina** (1849-1925).

Zajímalo mě, zda je možné sestavit papírový model topologicky ekvivalentní s **d** a jak dopadne praktické ověření tvrzení, že Kleinovu láhev lze vytvořit spojením dvou Möbiových pásů.

Obtížně představitelné úvahy bývají v této souvislosti ilustrovány pomocí grafu (viz například <http://mathworld.wolfram.com/Torus.html>) (2005). Jsou v něm písmeny označeny hrany (strany), které se spojí, a šipkami je pak vyznačena orientace hran.

Uvažujme obdélníkový proužek papíru, jehož kratší protilehlé strany jsou souhlasně orientovány. Jestliže jeho vrcholy spojíme (slepíme) tak, abychom zachovali orientaci, vznikne *plášť válce* (obr. 3.206).



Obr. 3.206 Graf pláště válce

Slepený pás jako plocha má dvě volné hrany. Když jej budeme stříhat v delší ose původního proužku, rozpadne se na dvě části. Když začneme povrch obarvovat, obarvíme jednu stranu, druhou nikoliv. To bychom museli přejít přes hranu, neboť válcová plocha není jednostranná.



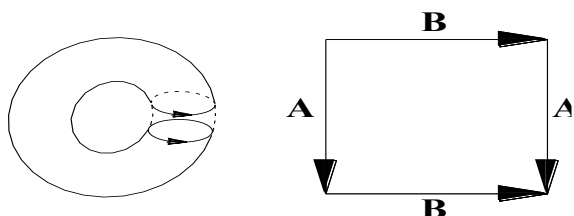
Pokud obdélníkový proužek (tedy útvar z prostoru E_2) spojíme tak, že zaměníme orientaci jedné strany (otočíme jej v prostoru E_3 o 180°), vznikne nová plocha, tzv. *Möbiův pás* (obr. 3.207).

Obr. 3.207 Graf Möbiova pásu

Möbiův pás je útvar s podivuhodnými topologickými vlastnostmi, které se liší od vlastností předcházející plochy (například $[I/107]$ $[II/60]$).

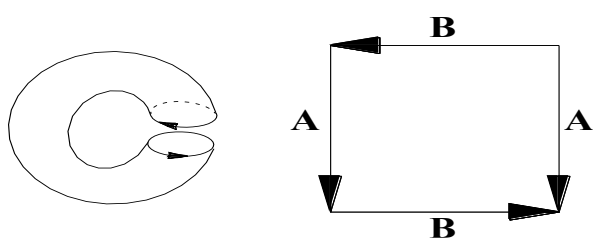
- Má jen jednu hranu, která je v prostoru topologickým obrazem kružnice.
- Když jej rozstříhneme podélně v ose, nerozpadne se, ale vznikne jeden proužek přetočený o 360° .
- Když ho budeme obarvovat, nepodaří se nám jej obarvit tak, aby byla jedna strana třeba červená a druhá zelená, neboť to je jednostranná plocha.
- Stříháme-li podélně ve třetině proužku, rozpadne se Möbiův pás na dvě části.

Uvažujme, že již máme plášť válce a teoreticky z něj modelujeme *anuloid* (torus) spojením dvou souhlasně orientovaných kruhových hran (obr. 3.208).



Obr. 3.208 Graf anuloidu

Teoreticky však bylo možné orientovat kruhové hrany navzájem opačně a pak je spojit (obr. 3.209).



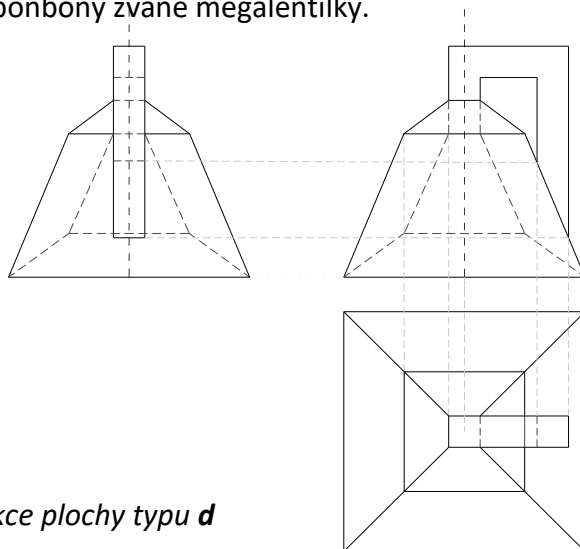
Obr. 3.209 Graf Kleinovy láhve

K tomuto překroucení bychom však potřebovali prostor o dimenzi vyšší, tedy E_4 . V něm by plocha sama sebe neprotínala, tak jako se Möbiův pás neprotíná v E_3 , ale protíná se jeho model (viz obrázek) v E_2 . Trojrozměrný útvar odpovídající obrázku **d**, ve kterém se ztotožní body v E_4 různé, lze chápat jako zobrazení uzavřeného čtyřrozměrného útvaru, zvaného *Kleinova láhev*, do E_3 .

Námět jsem zpracovávala i pro papírové vystřihovánky časopisu **abc**. Proto byla baňka **a** stylizována do jednoduché, snadno sestavitelné podoby skládající se ze dvou komolých rotačních kuželů a jednoho rotačního válce. [II/88] Nádoba, obr. 3.210, byla obalem na bonbony zvané megalentilky.



Obr. 3.210 Nádoba typu **a**



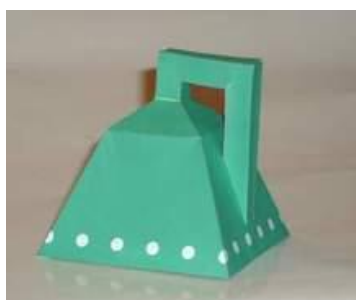
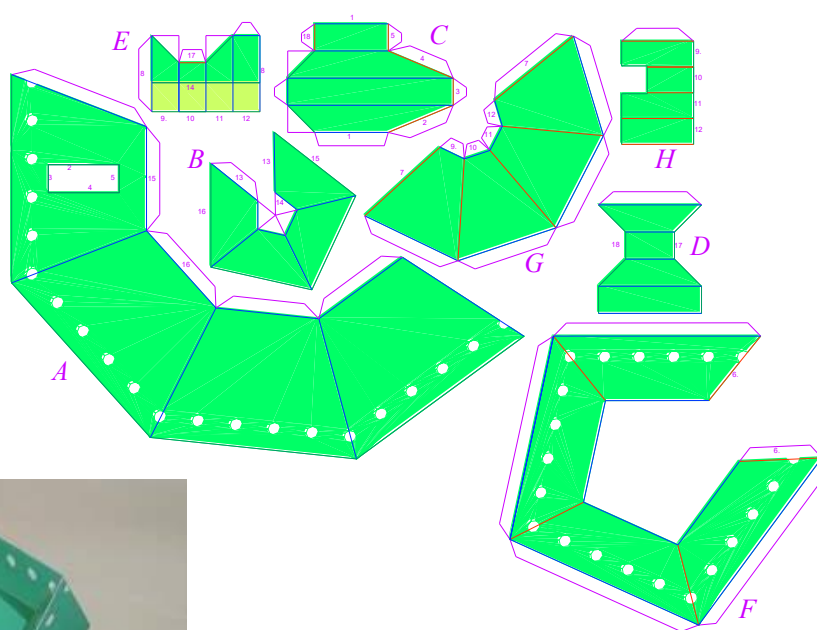
Obr. 3.211 Konstrukce plochy typu **d**

Kleinova láhev [II/87] byla větší oříšek po stránce konstrukční i funkční. V internetových diskuzích se také můžeme dozvědět, že ji *nelze z papíru modelovat*. Jediný papírový model jsem až dodatečně objevila v publikaci **Stephena Baara** [I/3]. Jeho síť je geometricky čistší než moje, neboť je z jediného kusu. Snažila jsem se o papírovou podobu plochy **d**. Provedla jsem tedy nezbytné konstrukční úvahy (obr. 3.211) a na jejich základě sestrojila síť papírového modelu hranaté Kleinovy láhve (obr. 3.212).

Jak jsem se již zmínila, pro dětský časopis není třeba hledat síť z jediného kusu, časopis sleduje jiné priority, mezi nimi smysl činností. Jestli jsme mohli do minulé nádoby ukládat lentilky, tak nová vystřihovánka

sloužila jako dávkovač malých antiperlí, ve kterém kuličky bonbonků záhadně mizí a zase se objevují na své cestě po celém povrchu plochy. Kdyby byly k láhvi přitahovány, mohly by opravdu putovat po celé její ploše, aniž by překonávaly nějakou vlnou hranu, jako tomu bylo u lentilek.

Obr. 3.212 Vystřihovanka Kleinovy láhve



Obr. 3.213



Obr. 3. 214 Papírový model Kleinovy lahve

Dráhu antiperlí pohybujících se i uvnitř bychom mohli sledovat v rozříznutém modelu na obr. 3.215. Pokud by pak měly tu vlastnost, že by plochu při pohybu obarvovaly, pak by byla celá jednobarevná, vymodelovali jsme jednostrannou plochu.

Zbývá odpovědět na otázku, kterou jsme si položili na začátku: Co se stane, když láhev rozstříhneme. Budou to dva Möbiovy pásy?

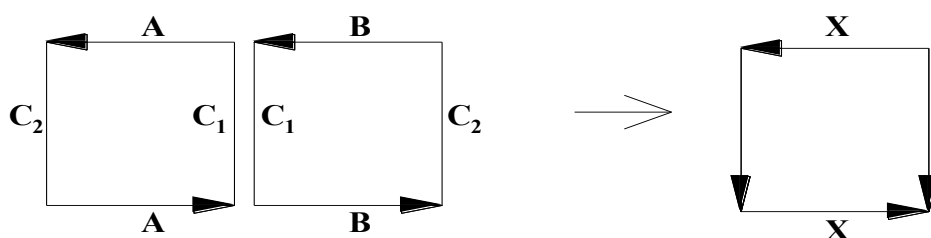
V popředí na fotografii 3.215 je Möbiův pás vytvořený z původně dvoustranné plochy (z papírového obdélníku, který má rub a líc). Můžeme tak dobře porovnat, jak a kde došlo na sestrojené ploše k onomu překroucení tmavé barvy na světlou, rubu na líc.



Obr. 3.215 Kleinova láhev vzniká spojením dvou Möbiových pásů

Spojení dvou Möbiových pásů a vznik Kleinovy láhve lze sledovat také na grafu (obr. 3.216).

Upravme obrázky publikace **Ladislava Kvasze** *Gramatika změny*. [1/73] Spojením dvou grafů Möbiových pásů podél „kruhových“ hran **C** vzniká graf Kleinovy láhve.

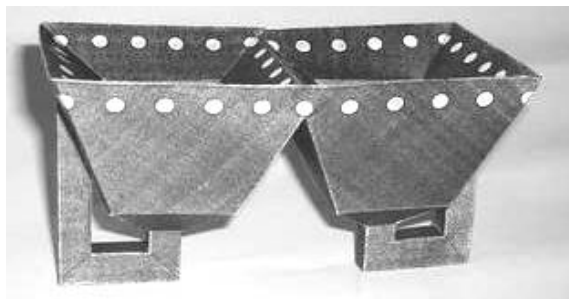


Obr. 3.216 Graf vzniku Kleinovy láhve

Co se stane, spojíme-li dvě Kleinovy láhve (obr. 3.217)?

Vidíme, že vzniká nový prostorový útvar, nová jednostranná plocha, která však má jiné topologické vlastnosti, než jaké měla Kleinova láhev.

Touto druhou úlohou jsme naznačili topologickou cestu k dalším hezkým otázkám a jejich řešení.



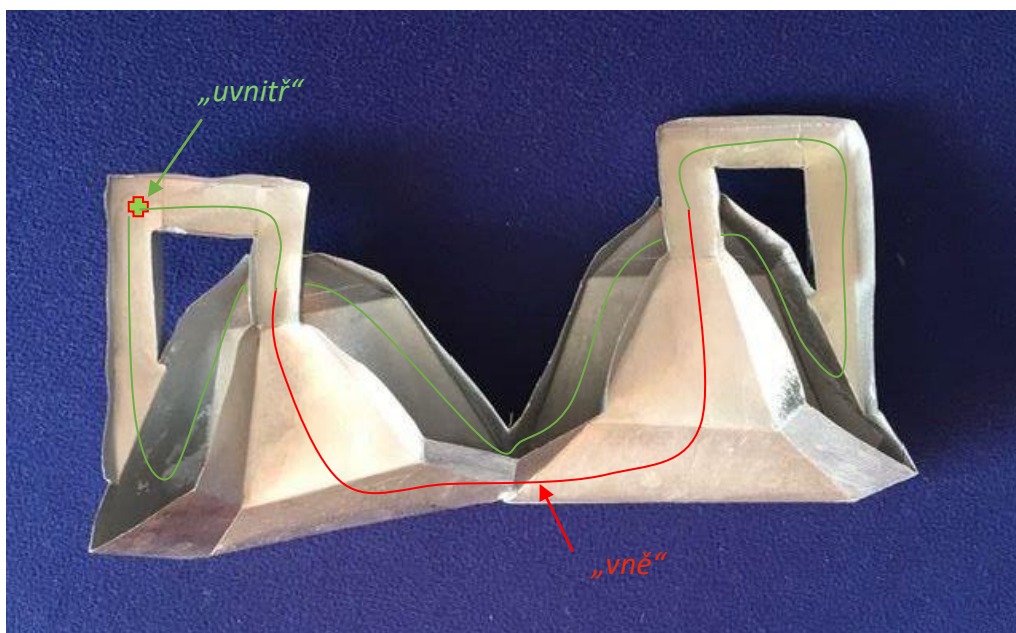
Obr. 3.217 Dvě spojené Kleinovy láhve

Literatura použitá v této kapitole dizertační práce

- [I/3] BAAR, S A *Miscellany of Puzzles*. New York 1965. Ruský překlad *Rossypy golovolomok*. Moskva 1978
- [I/73] KVASZ, L. *Gramatika změny*. Chronos. Bratislava 1999
- [I/107] STEINHAUS, H. *Kaleidoskop der Mathematik*. VEB. Berlin 1959
- [II/60] KUPČÁKOVÁ, M. *Kouzelné pásky na vánoční ubrousky*. ABC časopis generace XXI. století, č. 26, roč. 46 (2001), str. 24, 25
- [II/87] KUPČÁKOVÁ, M. *Kleinova láhev jako dávkovač antiperlí*. ABC časopis generace XXI. století, č. 6, roč. 49 (2004), str. 21, 24, ISSN 0322 – 9580
- [II/88] KUPČÁKOVÁ, M. *Džinova láhev*. ABC časopis generace XXI. století, č. 8, roč. 49 (2004), str. 24, 26, ISSN 0322 – 9580

Dovětek 2024 (MK)

Na celou plochu ze závěru kapitoly můžeme nahlédnout pomocí rozříznutého modelu, jako na obr. 3.215.



Vystřihovánka je však přestříknuta barvou, jako by byla sestavena z jednobarevného papíru, který nemá rub a líc. Zub času ji sice za dvacet let topologicky zdeformoval, i přesto vidíme volné přecházení z „vnitřku“ do „vnějšku“ na celé ploše. Červená cesta by mohla vést i bodem, který je na „vnější“ straně startovního křížku, neboť v kompaktním modelu není hrana (na fotografii dole).